STM 1950

Det gyllene tonsystemet

Av Arne Sundberg

DET GYLLENE TONSYSTEMET[1]

DANSKEN Thorvald Kornerup har ägnat ett helt liv åt att lösa temperaturfrågan inom musikteorin. Till slut har han på matematisk väg kommit fram till en elegant lösning. Då denna intressanta behandling av problemet knappast tycks vara känd utanför Danmark, kunde en kortfattad redogörelse för konstruktionen av detta tonsystem ha ett visst värde för musikteoretikerna.

Själva namnet »det gyllene tonsystemet» ger vid handen, att det gyllene snittet spelar huvudrollen vid denna indelning av oktaven i 12 delar. Efter den vikt, som konstruktören lägger vid gyllene snittets skönhet och t. o. m. etiska fulländning,[2] borde man vänta sig, att redan delningen av oktaven med gyllene snittet skulle ge ett musikaliskt användbart intervall. Så förhåller det sig emellertid inte; i så fall skulle säkert matematiker ha löst temperaturfrågan[3] under en mycket tidigare period, då man tillmätte det gyllene snittet avsevärt större betydelse än nu.

Kornerups väg ur denna svårighet följer i stort sett historiska linjer. T.o.m. pythagoreerna definierade ett heltonsteg som skillnaden mellan kvint och kvart, de inom oktavens omfång enklaste och mest harmoniska intervallen, som man därför med gehöret lättast kan uppfatta som rena eller svävningsfria. Detta intervall, ${}^2\log(3/2)-{}^2\log(4/3)$ eller ${}^2\log(9/8)$, har emellertid intet med gyllene snittet att göra. För att råda bot mot detta förhållande konstruerar Kornerup en annan indelning av oktaven i kvart och kvint, vilken är så beskaffad, att man genom upprepad delning av kvarten med gyllene snittet erhåller skillnaden mellan dessa intervall. (På grund av gyllene snittets egenskaper får man kvart = liten ters + heltonsteg och liten ters = heltonsteg + halvtonsteg. Om då detta heltonsteg utgör skillnaden mellan kvart och kvint, har man alla intervall man behöver för att få oktaven delad i 12 delar och summan av delarna att utgöra ett helt.)

---

[1] Detta vill vara en kritisk framställning av Thorvald Kornerups på gyllene snittet byggda tonsystem. Då hans egen framställning är mycket vidlyftig och svårtillgänglig samt späckad med metafysiska spekulationer, och då de bärande principerna för uppbyggnaden av systemet icke klart utsägas, så att man ibland kan ifrågasätta, om han själv fattat konsekvenserna av sina resonemang, har jag velat ge en logisk framställning av dessa bärande principer.

[2] »The Proportion — — — has in multifarious (quite independent of one another) spheres, latently shown itself to be the ideal itself, 'The Ideal of *Beauty*' (universal feeling of harmony) and *Justice*. (Thorvald Kornerup: Acoustic Valuation of Intervals by Aid of the Stable Tone-System, Köpenhamn 1938, s. 5. Kornerups kurs.)

[3] Med temperatur i strängare mening avses här en indelning av oktaven i *lika* delar.

Här förtjänar att påpekas den självklara saken, att genom detta förfaringssätt temperaturprincipen åsidosatts. Det finns ingen rationell del av oktaven, som går jämnt upp i dessa delintervall, eftersom delning med gyllene snittet innebär skapandet av ett irrationellt tal.

Det gyllene snittet innebär att en storhet delas på sådant sätt, att storheten förhåller sig till den större delen som denna till den mindre. Om enheten delas i gyllene snittet och den större delen kallas w, erhålles ur definitionen:

$$\frac{1}{w}=\frac{w}{1-w};\ \text{eller}\ w^2=1-w.$$

Denna andragradsekvation har den positiva roten $w=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Att dela en storhet, a, med gyllene snittet innebär tydligen att multiplicera storheten med w, varvid den större delen, aw, erhålles. Att dela denna på samma sätt innebär att ännu en gång multiplicera med w. aw^2 är den större delen vid denna nya delning. Eftersom $w^2=1-w$, är detta även den mindre delen i den första delningen.

Antag, att kvinten nu är x. Då blir kvarten $1-x$, om oktaven sättes som enhet. Det Kornerupska villkoret ger ekvationen:

$$x-(1-x)=(1-x)\,w^2;$$
$$2x-1=w^2-xw^2;$$
$$x=\frac{1+w^2}{2+w^2}=\frac{2-w}{3-w}.$$

Om värdet på w insättes erhålles

$$x=\frac{15-\sqrt{5}}{22}.$$

Uträknat med åtta decimaler ger detta $x=0{,}58017873$ eller 580,17873 mo. Som jämförelse kan nämnas, att motsvarande värde på naturkvinten, ${}^2\log(3/2)$ är 584,96249 mo.

Kvarten eller $1-x=\frac{7+\sqrt{5}}{22}=419{,}82127$ mo. ${}^2\log(4/3)=415{,}03751$ mo.

Heltonsteget $=\frac{4-\sqrt{5}}{11}=160{,}35746$ mo; ${}^2\log(9/8)=169{,}92498$ mo.

Den liksvävande 12-tonstemperaturen delar oktaven i tolv lika stora delar. Följande tabell ger de harmoniska intervallen och motsvarande 12-tonsintervall och gyllene intervall.

Som framgår av tabellen ger inte 12-tonstemperaturen en idealisk lösning av temperaturproblemet. Genom att dela oktaven i mindre delar har man sökt skapa intervall, som bättre ansluter sig till de harmoniska. Sådana temperaturer äro 19-, 31- och 81-tonstemperaturerna.

Kvinterna i dessa temperaturer ha värdena 7/12, 11/19, 18/31 och 47/81. Kornerup gör observationen, att dessa tal ingå i talföljden 1/2, 3/5, 4/7, 7/12, 11/19, 18/31, 29/50, 47/81 osv. Denna är oscillerande och konvergerar mot gränsvärdet $\frac{15-\sqrt{5}}{22}$ eller den gyllene kvinten. Detta

HARMONISKA INTERVALL

Sekund, liten	$^{2}\log\,(16/15) =$	93,10942 mo =	111,73130 C
Sekund, stor	$^{2}\log\,(9/8) =$	169,92498 mo =	203,90998 C
Ters, liten	$^{2}\log\,(6/5) =$	263,03440 mo =	315,64128 C
Ters, stor	$^{2}\log\,(5/4) =$	321,92809 mo =	386,31371 C
Kvart	$^{2}\log\,(4/3) =$	415,03751 mo =	498,04501 C
Kvint	$^{2}\log\,(3/2) =$	584,96249 mo =	701,95499 C
Sext, liten	$^{2}\log\,(8/5) =$	678,07191 mo =	813,68629 C
Sext, stor	$^{2}\log\,(5/3) =$	736,96558 mo =	884,35872 C
Septima, liten	$^{2}\log\,(16/9) =$	830,07502 mo =	996,09002 C
Septima, stor	$^{2}\log\,(15/8) =$	906,89058 mo =	1 088,26870 C

LIKSVÄVANDE 12-TONSINTERVALL

Sekund, liten	1/12 =	83,33333 mo =	100 C
Sekund, stor	2/12 =	166,66667 mo =	200 C
Ters, liten	3/12 =	250,00000 mo =	300 C
Ters, stor	4/12 =	333,33333 mo =	400 C
Kvart	5/12 =	416,66667 mo =	500 C
Kvint	7/12 =	583,33333 mo =	700 C
Sext, liten	8/12 =	666,66667 mo =	800 C
Sext, stor	9/12 =	750,00000 mo =	900 C
Septima, liten	10/12 =	833,33333 mo =	1 000 C
Septima, stor	11/12 =	916,66667 mo =	1 100 C

GYLLENE INTERVALL

Sekund, liten	$\frac{4\sqrt{5}-5}{22}$	= 99,10635 mo =	118,92762 C
Sekund, stor	$\frac{4-\sqrt{5}}{11}$	= 160,35746 mo =	192,42896 C
Ters, liten	$\frac{3\sqrt{5}-1}{22}$	= 259,46381 mo =	311,35657 C
Ters, stor	$\frac{2(4-\sqrt{5})}{11}$	= 320,71492 mo =	384,85790 C
Kvart	$\frac{7+\sqrt{5}}{22}$	= 419,82127 mo =	503,78552 C
Kvint	$\frac{15-\sqrt{5}}{22}$	= 580,17873 mo =	696,21448 C
Sext, liten	$\frac{3+2\sqrt{5}}{11}$	= 679,28508 mo =	815,14210 C
Sext, stor	$\frac{23-3\sqrt{5}}{22}$	= 740,53619 mo =	888,64343 C
Septima, liten	$\frac{7+\sqrt{5}}{11}$	= 839,64254 mo =	1 007,57104 C
Septima, stor	$\frac{27-4\sqrt{5}}{22}$	= 900,89365 mo =	1 081,07238 C

tar Kornerup som ett bevis för det gyllene tonsystemets allmängiltighet.[1]

De logiska kullerbyttorna vid bevisföringen äro flera. Kornerup låter bevisets senare del bygga på temperaturprincipen, som han vid uppbyggandet av tonsystemet förkastat. Även om i de högre temperaturerna systemen som helhet bättre ansluta sig till de harmoniska intervallen, bli kvinterna därför inte bättre. I den nämnda talföljden ligger 7/12 närmast den harmoniska kvinten av alla. Om delarna sedan göras mindre, kommer man snart till det fall, då ett annat intervall än det i talföljden förekommande blir bättre. Kornerup har själv överskridit detta stadium vid delningen. Användandet av gyllene snittet medför ej heller, att de övriga intervallen komma särskilt nära de harmoniska.[2]

Att utreda de musikteoretiska konsekvenserna av detta system går utanför denna framställnings syfte. Systemet är visserligen bättre än 12-tonstemperaturen men tycks överträffas t. ex. av 53-tonstemperaturen. Att betrakta det som det sista ordet och lösningen av temperaturproblemet är nog att förgylla både verket och dess mästare.

Arne Sundberg.

LITTERATUR

Thorvald Kornerup: Das Goldene Tonsystem als Fundament der theoretischen Akustik, Köpenhamn 1935.

— Acoustic Valuation of Intervals by Aid of the Stable Tone-System, Köpenhamn 1938.

Sven E. Svensson: Vårt tonsystem och dess temperaturer. Jfr ovan, ss. 152—186.

[1] I själva verket tycks Kornerup ha gått till väga på motsatt sätt. Han har gått tillräckligt högt i talföljden, 3571/6155, för att få ett värde, som mycket nära överensstämmer med gränsvärdet. Han visar, att detta har de egenskaper, som förut omtalats, och sluter av gyllene snittets universella giltighet, att detta är det sanna och rätta tonsystemet.

[2] Kvadratiska medelfelet för de i tabellen upptagna intervallen är för 12-tonsystemet ung. 11 cent och för det gyllene systemet ung. 7 cent.